

Câu I (2,0 điểm)

1) Tìm điều kiện xác định:

a) $A = \sqrt{x-4}$

b) $B = \frac{5}{x-2}$

2) Rút gọn:

a) $A = \sqrt{75} - \sqrt{3}$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{2}$

Câu II (2,0 điểm)1) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -2x + 3$.2) Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.**Câu III (3,0 điểm)**1) Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, biết $HB = 2\text{cm}$, $HC = 8\text{cm}$. Tính độ dài các cạnh AB, AC.

2) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5km/h thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy.

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x-6} + 7\sqrt{y+5} = 27 \\ \sqrt{x-6} + 2\sqrt{y+5} = 8 \end{cases}$$

Câu IV (2,0 điểm)Cho hình vuông ABCD, các điểm M, N thay đổi trên các cạnh BC, CD sao cho góc MAN bằng 45° (M, N không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AM, AN với BD. Chứng minh rằng:

1) Tứ giác ABMQ và tứ giác MNQP là các tứ giác nội tiếp.

2) NA là phân giác của góc MND.

3) MN tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Câu V (1,0 điểm)1) Cho $a > b > 0$. Hãy so sánh: $\sqrt{a+2} - \sqrt{a}$ với $\sqrt{b+2} - \sqrt{b}$.2) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x + 3y \leq 10$.Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{27}{\sqrt{3y}} \geq 10$.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu I (2,0 điểm).

1) Tìm điều kiện xác định:

a) $A = \sqrt{x-4}$

b) $B = \frac{5}{x-2}$

2) Rút gọn:

a) $A = \sqrt{75} - \sqrt{3}$

b) $B = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{2}$

Lời giải

1) Tìm điều kiện xác định:

a) $A = \sqrt{x-4}$

Biểu thức $A = \sqrt{x-4}$ xác định khi và chỉ khi $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$.

Vậy $A = \sqrt{x-4}$ xác định khi và chỉ khi $x \geq 4$.

b) $B = \frac{5}{x-2}$

Biểu thức $B = \frac{5}{x-2}$ xác định khi và chỉ khi $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Vậy $B = \frac{5}{x-2}$ xác định khi và chỉ khi $x \neq 2$.

2) Rút gọn:

a) $A = \sqrt{75} - \sqrt{3}$

Ta có: a) $A = \sqrt{75} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Vậy $A = 4\sqrt{3}$.

b) $B = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{2}$

Ta có: b) $B = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1$

Vậy $B = 1$.

Câu II (2,0 điểm).

1) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -2x + 3$.

2) Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

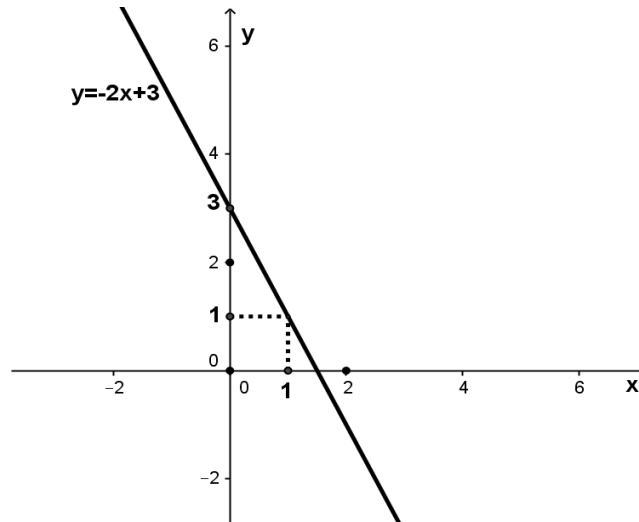
Lời giải

1) Vẽ đồ thị hàm số: $y = -2x + 3$.

Ta có bảng giá trị:

x	0	1
$y = -2x + 3$	3	1

Đồ thị hàm số:



2) Ta có: $\Delta' = 2^2 - (m - 1) = 5 - m$

Để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5$

Áp dụng định lí Vi-et ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Theo bài ta ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 14$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 14$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2(m - 1) = 14$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \quad (t/m)$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

Câu III (3,0 điểm).

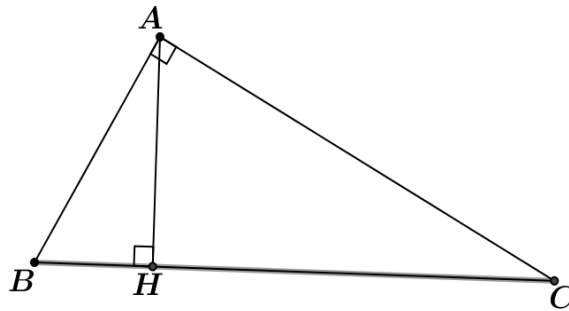
1) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , biết $HB = 2\text{ cm}$, $HC = 8\text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh AB, AC .

2) Một ô tô và một xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km , đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ. Tìm vận tốc của ô tô và xe máy, biết rằng nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy.

3) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x-6} + 7\sqrt{y+5} = 27 \\ \sqrt{x-6} + 2\sqrt{y+5} = 8 \end{cases}$$

Lời giải

1)



Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC , đường cao AH ta có:

$$AH^2 = BH \cdot CH = 2 \cdot 8 = 16$$

$$\Rightarrow AH = 4 \text{ (cm)}$$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ABH , ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

Áp dụng định lí Pytago trong tam giác vuông ACH , ta có:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 4^2 + 8^2 = 80$$

$$\Rightarrow AC = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } AB = 2\sqrt{5} \text{ (cm); } AC = 4\sqrt{5} \text{ (cm)}$$

2) Gọi vận tốc của ô tô và vận tốc của xe máy lần lượt là x, y (km/h) (ĐK: $x, y > 0$)

Sau 2 giờ ô tô đi được quãng đường là: $2x$ (km)

Sau 2 giờ xe máy đi được quãng đường là: $2y$ (km)

Vì hai xe khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh cách nhau 200 km, đi ngược chiều và gặp nhau sau 2 giờ nên ta có phương trình:

$$2x + 2y = 200 \Leftrightarrow x + y = 100 \quad (1)$$

Nếu vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h thì vận tốc mới của ô tô là: $x + 10$ (km/h)

Nếu vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc mới của xe máy là: $y - 5$ (km/h)

Vì vận tốc của ô tô tăng thêm 10 km/h và vận tốc của xe máy giảm đi 5 km/h thì vận tốc của ô tô bằng 2 lần vận tốc của xe máy nên ta có phương trình:

$$x + 10 = 2(y - 5) \Leftrightarrow x - 2y = -20 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 100 \\ x - 2y = -20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 120 \\ x - 2y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 40 \\ x = 60 \end{cases} \quad (t/m)$$

Vậy vận tốc của ô tô là 60 km/h và vận tốc của xe máy là 40 km/h .

3) ĐKXD: $\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ y + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq -5 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x-6} \\ b = \sqrt{y+5} \end{cases} (a; b \geq 0)$, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} 3a + 7b = 27 \\ a + 2b = 8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 7b = 27 \\ 3a + 6b = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 7b = 27 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \quad (t/m)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-6} = 2 \\ \sqrt{y+5} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 6 = 4 \\ y + 5 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases} \quad (t/m)$$

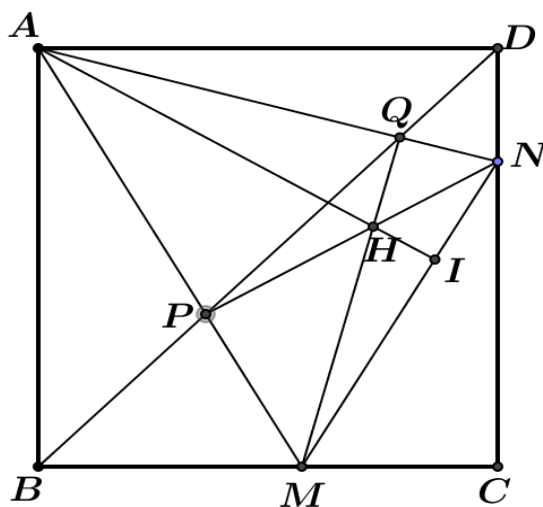
Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (10; 4)$.

Câu IV (2,0 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$, các điểm M, N thay đổi trên các cạnh BC, CD sao cho góc MAN bằng 45° (M, N không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AM, AN với BD . Chứng minh rằng:

- 1) Tứ giác $ABMQ$ và tứ giác $MNQP$ là các tứ giác nội tiếp.
- 2) NA là phân giác của góc MND .
- 3) MN tiếp xúc với một đường tròn cố định

Lời giải



- 1) Tứ giác $ABMQ$ và tứ giác $MNQP$ là các tứ giác nội tiếp.

Ta có: $\widehat{MAN} = 45^\circ$ hay $\widehat{MAQ} = 45^\circ$

Lại có: $\widehat{CBD} = 45^\circ$ (do BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$) nên $\widehat{MBQ} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{MAQ} = \widehat{MBQ} = 45^\circ$ suy ra tứ giác $ABMQ$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng chắn một cạnh dưới các góc bằng nhau)

Suy ra $\widehat{QMA} = \widehat{ABQ} = 45^\circ$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AQ)

$$\Rightarrow \widehat{QMP} = 45^\circ \quad (1)$$

Ta có: $\widehat{DBC} = 45^\circ$ (do BD là đường chéo của hình vuông $ABCD$) nên $\widehat{NDP} = 45^\circ$

Mà $\widehat{MAN} = 45^\circ$ nên $\widehat{PAN} = 45^\circ$

Do đó $\widehat{NDP} = \widehat{PAN} = 45^\circ$ suy ra tứ giác $MNQP$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có hai đỉnh kề cùng chắn một cạnh dưới các góc bằng nhau) (đpcm).

2) NA là phân giác của góc MND .

Do tứ giác $ADNP$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{APN} + \widehat{ADN} = 180^\circ$.

Mà $\widehat{ADN} = 90^\circ$ (do $ABCD$ là hình vuông) nên $\widehat{APN} = 90^\circ$

Xét tam giác vuông ADN ta có: $\widehat{DNA} = 90^\circ - \widehat{DAN} = 90^\circ - \widehat{DPN} = 90^\circ - \widehat{QPN}$ ($\widehat{DAN} = \widehat{DPN}$ do là hai góc nội tiếp cùng chắn cung DN)

Do tứ giác $MNQP$ nội tiếp đường tròn (cmt) nên $\widehat{QNM} = \widehat{APQ} = 90^\circ - \widehat{QPN}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp)

Do đó $\widehat{DNA} = \widehat{QNM}$ suy ra $\widehat{DNA} = \widehat{ANM}$ hay NA là phân giác của góc MND (đpcm).

3) MN tiếp xúc với một đường tròn cố định

Gọi H là giao điểm của NP và MQ .

Vì tứ giác $ABMQ$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{ABM} + \widehat{AQM} = 180^\circ$

Mà $\widehat{ABM} = \widehat{ABC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQM} = 90^\circ \Rightarrow MQ \perp AN$

Lại có $\widehat{APN} = 90^\circ$ (cmt) $\Rightarrow NP \perp AM$

Mà H là giao điểm của NP và MQ

$\Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác AMN .

Gọi I là giao điểm của AH và MN .

Suy ra $AI \perp MN$ (Do AI là đường cao thứ ba của tam giác AMN)

Ta có tứ giác $ABMQ$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{AQB} = \widehat{AMB}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà tứ giác $MPQN$ nội tiếp (cmt) nên $\widehat{AQP} = \widehat{NMP}$ (góc ngoài và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác nội tiếp)

Suy ra $\widehat{AMB} = \widehat{NMP}$ hay $\widehat{AMB} = \widehat{IMA}$

Xét ΔAMB và ΔAMI ta có:

$$\widehat{AMB} = \widehat{IMA} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{ABM} = \widehat{AIM} = 90^\circ$$

AM là cạnh chung

Do đó $\Delta AMB = \Delta AMI$ ($ch - gn$)

$\Rightarrow AB = AI$ (cặp cạnh tương ứng) nên AI có độ dài không đổi

$\Rightarrow (A; AI)$ cố định

Lại có $AI \perp MN$ (cmt) $\Rightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn $(A; AI)$ tại I

Vậy MN tiếp xúc với đường tròn $(A; AI)$ cố định (đpcm).

Câu V (1,0 điểm).

1) Cho $a > b > 0$. Hãy so sánh: $\sqrt{a+2} - \sqrt{a}$ với $\sqrt{b+2} - \sqrt{b}$.

2) Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $x + 3y \leq 10$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{27}{\sqrt{3y}} \geq 10$.

Lời giải

1) Xét hiệu

$$\begin{aligned} H &= (\sqrt{a+2} - \sqrt{a}) - (\sqrt{b+2} - \sqrt{b}) \\ &= (\sqrt{a+2} - \sqrt{b+2}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \\ &= \frac{a+2-b-2}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} - \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= \frac{a-b}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} - \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \\ &= (a-b) \left(\frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \end{aligned}$$

Vì $a > b > 0 \Rightarrow a - b > 0$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sqrt{a+2} > \sqrt{a} \\ \sqrt{b+2} > \sqrt{b} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{a+2} + \sqrt{b+2} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} < \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} < 0$$

$$\text{Do đó } (a-b) \left(\frac{1}{\sqrt{a+2} + \sqrt{b+2}} - \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) < 0$$

$$\Rightarrow H = (\sqrt{a+2} - \sqrt{a}) - (\sqrt{b+2} - \sqrt{b}) < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+2} - \sqrt{a} < \sqrt{b+2} - \sqrt{b}$$

Vậy với $a > b > 0$ thì $\sqrt{a+2} - \sqrt{a} < \sqrt{b+2} - \sqrt{b}$

2) Áp dụng BĐT Svac-xơ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{27}{\sqrt{3y}} &= \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{3y}} + \frac{9}{\sqrt{3y}} + \frac{9}{\sqrt{3y}} \\ &= \frac{1^2}{\sqrt{x}} + \frac{3^2}{\sqrt{3y}} + \frac{3^2}{\sqrt{3y}} + \frac{3^2}{\sqrt{3y}} \geq \frac{(1+3+3+3)^2}{\sqrt{x} + 3\sqrt{3y}} = \frac{100}{\sqrt{x} + 3\sqrt{3y}} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có:

$$\begin{aligned} (x+3y)(1+9) &\geq (\sqrt{x} + 3\sqrt{3y})^2 \\ \Rightarrow \sqrt{x} + 3\sqrt{3y} &\leq \sqrt{10(x+3y)} \leq \sqrt{10 \cdot 10} = 10 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{27}{\sqrt{3y}} \geq \frac{100}{\sqrt{x} + 3\sqrt{3y}} \geq \frac{100}{10} = 10 \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{3y}} \\ x + 3y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$