

Câu 1 (1,5 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 3\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$)

Bài 2 (2,5 điểm).

a) Giải các phương trình sau:

1) $2x - 4 = 0$

2) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

c) Một người đi xe máy từ huyện Ngân Sơn đến huyện Chợ Mới cách nhau 100 km. Khi về người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi của xe máy.

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x^2$ và $y = -x + 2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .

b) Tìm a, b để đường thẳng (d') : $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

Câu 4 (1,5 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 2m^2 + 20$.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh các tứ giác AEHF, BFEC nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và BC. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

c) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

-----HẾT-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu; Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN

Câu 1 (1,5 điểm). Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 3\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$

b) $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{x-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$)

Lời giải:

a)
$$\begin{aligned} A &= 3\sqrt{2} - \sqrt{32} + \sqrt{50} \\ &= 3\sqrt{2} - \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} \\ &= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vậy $A = 4\sqrt{2}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \right] \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$)

Bài 2 (2,5 điểm).

a) Giải các phương trình sau:

1) $2x - 4 = 0$

2) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

c) Một người đi xe máy từ huyện Ngân Sơn đến huyện Chợ Mới cách nhau 100 km. Khi về người đó tăng vận tốc thêm 10 km/h so với lúc đi, do đó thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc lúc đi của xe máy.

Lời giải:

a) Giải các phương trình:

1) $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.

2) $x^4 - x^2 - 12 = 0$

Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$), phương trình trở thành: $t^2 - t - 12 = 0$ Xét $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-12) = 49 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{49}}{2} = -3 < 0 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $t = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 2$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y = -5 \\ x = 2y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; -1)$.c) Gọi vận tốc lúc đi của xe máy là x (km/h; $x > 0$)Thời gian lúc đi của xe máy là: $\frac{100}{x}$ (giờ)Vận tốc lúc về của xe máy là: $x + 10$ (km/h)Thời gian lúc về của xe máy là: $\frac{100}{x + 10}$ (giờ)Vì lúc về xe máy tăng tốc nên thời gian về ít hơn so với thời gian đi là 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ nên

ta có phương trình:

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 10} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 200(x + 10) - 200x = x(x + 10)$$

$$\Leftrightarrow 200x + 2000 - 200x = x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 10x - 2000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 40)(x + 50) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 40 & (tm) \\ x = -50 & (ktm) \end{cases}$$

Vậy vận tốc lúc đi của xe máy là 40 km/h.

Câu 3 (1,5 điểm).

- a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x^2$ và $y = -x + 2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .
- b) Tìm a, b để đường thẳng (d') : $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1;2)$ và song song với đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

Lời giải:

a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x^2$ và $y = -x + 2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .

- Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2$:

Đồ thị hàm số $y = 2x^2$ có hệ số $a = 2 > 0$ nên có bề lõm hướng lên, đồng biến khi $x > 0$, nghịch biến khi $x < 0$ và nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta có bảng giá trị sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x^2$	8	2	0	2	8

Vậy đồ thị hàm số $y = 2x^2$ là đường cong đi qua các điểm $(-2;8);(-1;2);(0;0);(1;2);(2;8)$.

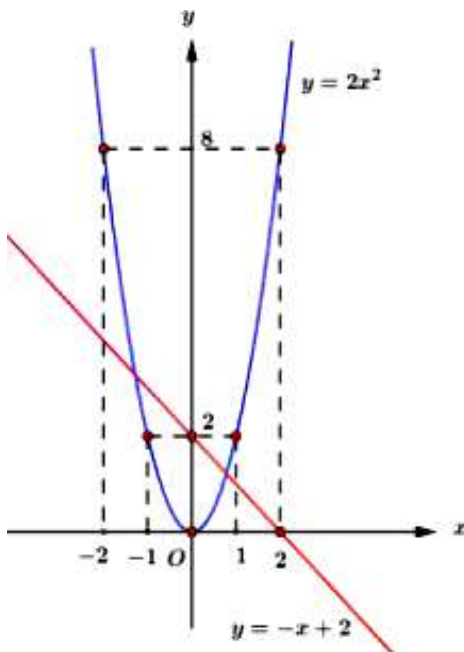
- Vẽ đồ thị hàm số $y = -x + 2$:

Ta có bảng giá trị sau:

x	0	2
$y = -x + 2$	2	0

Vậy đồ thị hàm số $y = -x + 2$ là đường thẳng đi qua hai điểm $(0;2);(2;0)$.

- Vẽ đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và đường thẳng $y = -x + 2$ trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy .



b) Tìm a, b để đường thẳng (d') : $y = ax + b$ đi qua điểm $M(1; 2)$ và song song với đường thẳng (d) : $y = -x + 2$.

Vì đường thẳng (d') đi qua điểm $M(1; 2)$ nên ta có: $a + b = 2$ (1)

Vì đường thẳng (d') song song với đường thẳng (d) : $y = -x + 2$ nên ta có:

$$\begin{cases} a = -1 \\ b \neq 2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} a = -1 \\ a + b = 2 \\ b \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = -1$; $b = 3$.

Câu 4 (1,5 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 2$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 2m^2 + 20$.

Lời giải:

a) Với $m = 2$ phương trình có dạng: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Xét $\Delta' = 3^2 - 8 = 1 > 0$ nên phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{3+1}{1} = 4$$

$$x_2 = \frac{3-1}{1} = 2$$

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = 4$; $x = 2$.

b) Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1) có:

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 4) = m^2 + 2m + 1 - m^2 - 4 = 2m - 3$$

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi:

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2} \quad (*)$$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases}$ (2)

Thay $2(m+1) = x_1 + x_2$ vào điều kiện đề bài, ta được:

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 2m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 \leq 2m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 2m^2 + 20 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được:

$$[2(m+1)]^2 - (m^2 + 4) \leq 2m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow 4(m^2 + 2m + 1) - (m^2 + 4) \leq 2m^2 + 20$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 8m - 20 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)(m+10) \leq 0$$

$$\text{TH1: } \begin{cases} m+10 \geq 0 \\ m-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 \leq m \leq 2$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} m+10 \leq 0 \\ m-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -10 \\ m \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

Suy ra $-10 \leq m \leq 2$, kết hợp với điều kiện (*) ta được: $\frac{3}{2} < m \leq 2$

Vậy với $\frac{3}{2} < m \leq 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 2m^2 + 20$.

Câu 5 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

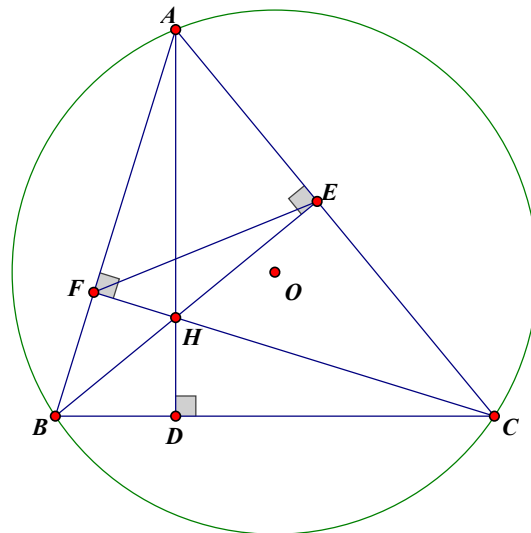
a) Chứng minh các tứ giác AEHF, BFEC nội tiếp đường tròn.

b) Đường thẳng AO cắt đường tròn tâm O tại điểm K khác điểm A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng HK và BC. Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.

c) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Lời giải:

a) Chứng minh các tứ giác AEHF, BFEC nội tiếp đường tròn.



Ta có: $\widehat{AEH} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC$)

$\widehat{AFH} = 90^\circ$ (vì $CF \perp AB$)

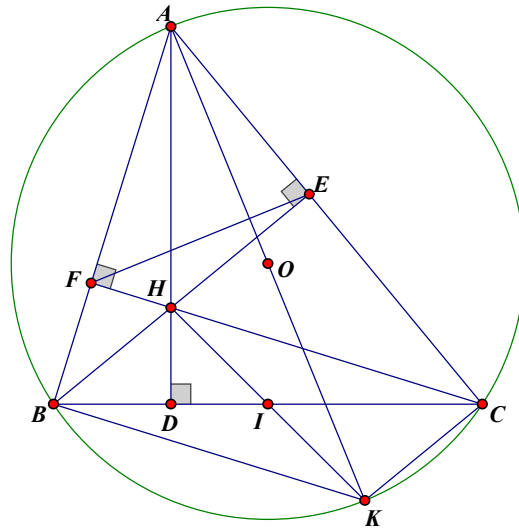
Xét tứ giác AEHF có: $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác AEHF nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

Ta có: $\widehat{BEC} = 90^\circ$ (vì $BE \perp AC$)

$\widehat{BFC} = 90^\circ$ (vì $CF \perp AB$)

Xét tứ giác BFEC có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$, do đó hai đỉnh F và E cùng thuộc cung chứa góc dựng trên đoạn BC nên tứ giác BFEC nội tiếp đường tròn đường kính BC.

b) Chứng minh I là trung điểm của đoạn thẳng BC.



Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ABK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KB \perp AB$.

Mặt khác: $CH \perp AB$ (giả thiết)

Suy ra: $KB \parallel CH$ (quan hệ vuông góc song song) (1)

Xét đường tròn (O) có:

$\widehat{ACK} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do đó $KC \perp AC$.

Mặt khác: $BH \perp AC$ (giả thiết)

Suy ra: $KC \parallel BH$ (quan hệ vuông góc song song) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác BHCK là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết), suy ra hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường (tính chất).

Mà I là giao điểm của BC và HK nên I là trung điểm của BC.

c) Tính $\frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$.

Đặt $P = \frac{AH}{AD} + \frac{BH}{BE} + \frac{CH}{CF}$

$$\Leftrightarrow P = \frac{AD - HD}{AD} + \frac{BE - HE}{BE} + \frac{CF - HF}{CF}$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - \frac{HD}{AD} + 1 - \frac{HE}{BE} + 1 - \frac{HF}{CF}$$

$$\Leftrightarrow P = 3 - \left(\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} \right)$$

Ta có:
$$\frac{HD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} = \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}}; \quad \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HAC} + S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC}} = 1$$

Vậy
$$P = \frac{AD - HD}{AD} + \frac{BE - HE}{BE} + \frac{CF - HF}{CF} = 3 - 1 = 2.$$