SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN**
HÀ NAM	**Năm học**
	Môn: Toán (Đề chuyên)
ĐỀ CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề*

Câu I. ***(2,0 điểm)*** Cho biểu thức $S=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ab}}+1\right):\dfrac{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{1-ab}$

với $a\ge 0, b\ge 0, a^2+b^2>0$ và $ab\ne 1$.

1. Rút gọn biểu thức S.

2. Tính giá trị của biểu thức S khi $a=3+2\sqrt{2}$ và $b=11-6\sqrt{2}$.

Câu II. ***(2,0 điểm)***

1. Giải phương trình $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0$.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2y-1-2\sqrt{2xy+x-4y-2}=0 \\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4. \end{cases}$

Câu III. ***(3,5 điểm)*** Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên Δ lấy điểm M sao cho $MA>R$. Qua M vẽ tiếp tuyến MC (C thuộc đường tròn (O), C khác A). Gọi H và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB và AM. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm O và vuông góc với AB. Gọi N là giao điểm của d và BC.

1. Chứng minh $OM // BN$ và $MC=NO$.

2. Gọi Q là giao điểm của MB và CH, K là giao điểm của AC và OM. Chứng minh đường thẳng QK đi qua trung điểm của đoạn thẳng BC.

3. Gọi F là giao điểm của QK và AM, E là giao điểm CD và OM. Chứng minh tứ giác $FEQO$ là hình bình hành. Khi M thay đổi trên Δ, tìm giá trị lớn nhất của $QF+EO$.

Câu IV. ***(1,5 điểm)***

1. Giải phương trình $x^3+y^2-x+3z=2021$ với x, y và z là các số nguyên.

2. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Bên trong hình vuông người ta lấy tùy ý 2021 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{2021}$ sao cho 2025 điểm $A, B, C, D, A_1, A_2, ..., A_{2021}$ không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ 2025 điểm trên luôn tồn tại 3 điểm là 3 đỉnh của hình tam giác có diện tích không quá $\dfrac{1}{4044}$.

Câu V. ***(1,0 điểm)*** Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\ge 512.$$

--- HẾT---

Họ và tên thí sinh:……………………………………Số báo danh:..................................

Cán bộ coi thi số 1……………………..………Cán bộ coi thi số 2…………….....................

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN
Năm học:
Môn: Toán (Đề chuyên)
Thời gian làm bài: 150 phút

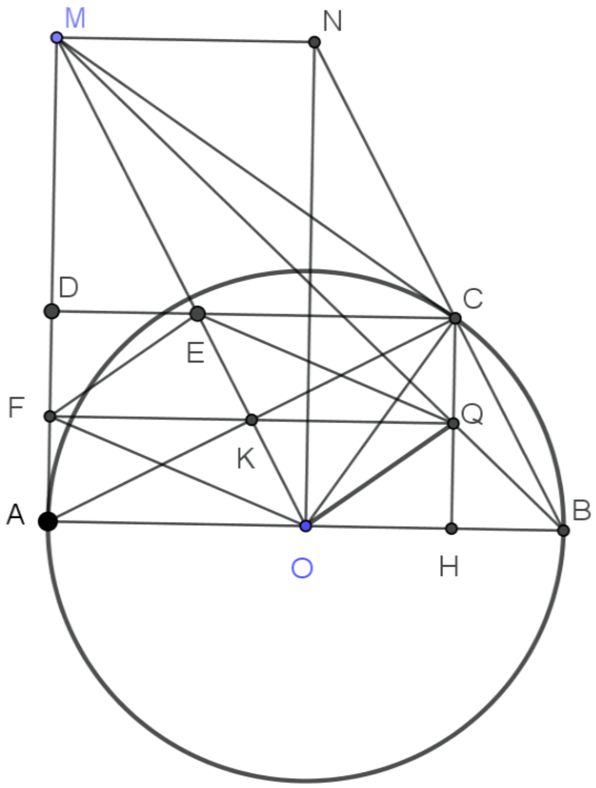
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN CHUYÊN

(Hướng dẫn chấm thi có 05 trang)

Lưu ý: - Điểm làm tròn đến 0,25.
- Các cách giải khác mà đúng cho điểm tương đương.

Nội dung	Điểm
Câu I. ***(2,0 điểm)*** Cho biểu thức $S=\left(\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{ab}+1}+\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{a}}{1-\sqrt{ab}}+1\right):\dfrac{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{1-ab}$ với $a\ge 0, b\ge 0,\ a^2+b^2>0$ và $ab\ne 1$.	
1.(1,0 điểm) Rút gọn biểu thức S	
$S=\dfrac{\left(\sqrt{a}+1\right)\left(1-\sqrt{ab}\right)+\left(\sqrt{ab}+\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{ab}+1\right)+1-ab}{1-ab}:\dfrac{a+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}}{1-ab}$	**0,25**
$=\dfrac{2\sqrt{a}+2}{1-ab}:\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}{1-ab}$	**0,25**
$=\dfrac{2\sqrt{a}+2}{1-ab}\cdot\dfrac{1-ab}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}$	**0,25**
$=\dfrac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	**0,25**
2.(1,0 điểm) Tính giá trị của biểu thức S với $a=3+2\sqrt{2}$ và $b=11-6\sqrt{2}.$	
$a=3+2\sqrt{2}=\left(1+\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{a}=1+\sqrt{2}.$	**0,5**
$b=11-6\sqrt{2}=\left(3-\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{b}=\left\|3-\sqrt{2}\right\|=3-\sqrt{2}.$	**0,25**
$S=\dfrac{2}{1+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}.$	**0,25**
Câu II (2,0 điểm)	

1. (1,0 điểm) Giải phương trình: $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0.$	
Phương trình $x^2+x+4-(2+x)\sqrt{x^2-x+4}=0.\ (1)$ TXĐ: $\mathbb{R}$. Đặt $t=\sqrt{x^2-x+4}\ (t\ge 0)$, khi đó phương trình (1) trở thành $t^2-(2+x)t+2x=0$ (2)	**0,25**
$\Leftrightarrow (t-2)(t-x)=0$.	**0,25**
Với $t_1=2\Rightarrow \sqrt{x^2-x+4}=2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x=0;x=1.$	**0,25**
Với $t_2=x\Rightarrow \sqrt{x^2-x+4}=x\Rightarrow -x+4=0\Rightarrow x=4.$ Thử lại, ta đi tới kết luận $S=\{0;1;4\}$.	**0,25**
2. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x+2y-1-2\sqrt{2xy+x-4y-2}=0\\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4.\end{cases}$	
Điều kiện: $\begin{cases}2xy+x-4y-2\ge 0\\ x-2\ge 0;2y+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}$	**0,25**
Phương trình $x-2-2\sqrt{(x-2)(2y+1)}+2y+1=0$ $\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2y+1}\right)^2=0\Leftrightarrow\sqrt{x-2}=\sqrt{2y+1}.$	**0,25**
Khi đó ta có hệ $\begin{cases}\sqrt{x-2}=\sqrt{2y+1}\\ \sqrt{x-2}+3\sqrt{2y+1}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x-2}=1\\ \sqrt{2y+1}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\ y=0\end{cases}$ (thỏa mãn)	**0,25**
Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;0)$.	**0,25**
Câu III. ***(3,5 điểm)*** Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Gọi Δ là tiếp tuyến của (O) tại A. Trên Δ lấy điểm M di động sao cho $MA>R$. Qua M dựng tiếp tuyến MC (C thuộc đường tròn (O), C khác A). Gọi H và D lần lượt là hình chiếu vuông góc của C lên AB và AM. Gọi d là đường thẳng qua điểm O và vuông góc với AB. Gọi N là giao điểm của d và BC.	

 (Học sinh không vẽ hình ý nào sẽ không được chấm điểm ý đó)	
1.(1,5 điểm) Chứng minh $OM//BN$ và $MC = NO$.	
Ta có $MA = MC$ và $OA = OC$ suy ra MO là đường trung trực của đoạn thẳng AC, suy ra $MO \perp AC$. (1).	**0,25**
Do $\widehat{ACB}$ là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn nên $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow AC \perp BN$. (2)	**0,25**
Từ (1) và (2) suy ra $MO//BN$.	**0,25**
Xét ΔMAO và ΔNOB vuông tại A và O; $AO = OB$; $\widehat{AOM} = \widehat{NBO}$ (hai góc đồng vị) Suy ra $\Delta MAO = \Delta NOB \Rightarrow MA = NO$.	**0,5**
Mặt khác : $MA = MC \Rightarrow MC = ON$. (2)	**0,25**
2.(1,0 điểm) Gọi Q là giao điểm của MB và CH. Gọi K là giao điểm của AC và OM. Chứng minh đường thẳng QK đi qua trung điểm của đoạn thẳng CB.	
Do $QH//AM$ suy ra $\dfrac{QH}{AM} = \dfrac{BH}{BA}$ (3).	**0,25**
Do $CH//ON$ suy ra $\dfrac{CH}{ON} = \dfrac{HB}{OB} \Rightarrow \dfrac{CH}{AM} = \dfrac{HB}{\frac{1}{2}AB}$ (4).	**0,25**

Từ (3) và (4) ta có $QH = \frac{1}{2}CH$, suy ra Q là trung điểm của CH.	**0,25**
Lại có K là trung điểm AC. Suy ra QK đi qua trung điểm của CB.	**0,25**
3. (1,0 điểm) Gọi F là giao điểm của QK và AM, E là giao điểm CD và OM. Chứng minh tứ giác $FEQO$ là hình bình hành. Khi M thay đổi trên Δ, tìm giá trị lớn nhất của $QF + EO$.	
Chứng minh $ADCH$ là hình chữ nhật. Do K là trung điểm AC và Q là trung điểm CH suy ra F là trung điểm AD.	**0,25**
Ta có $\Delta EKC = \Delta OKA\left(g.c.g\right) \Rightarrow KE = KO$ Ta có $\Delta FKA = \Delta QKC\left(g.c.g\right) \Rightarrow KF = KQ$. Suy ra $FEQO$ là hình bình hành.	**0,25**
Ta có $FQ + EO = AH + CB = AH + \sqrt{BH.BA} = AH + \sqrt{\left(AB - AH\right)AB}$.	**0,25**
Khi đó $AH + \sqrt{\left(AB - AH\right)AB} = AH + \frac{1}{AB}\cdot 2\cdot\frac{AB}{2}\cdot\sqrt{AB^2 - AB.AH}$ $\leq AH + \frac{1}{AB}\left(\frac{AB^2}{4} + AB^2 - AB.AH\right) = \frac{5}{4}AB.$ Dấu bằng xảy ra $AH = \frac{3}{4}AB \Leftrightarrow AM = \sqrt{3}.R$.	**0,25**
Câu IV. (1,5 điểm). **1. (0,75 điểm)** Tìm các số nguyên x, y và z thỏa mãn phương trình $x^3 + y^2 - x + 3z = 2021.$	
Xét theo $\bmod 3$ ta có $y^2 \equiv \{0;1\}\left(\bmod 3\right)$ và $2021 \equiv 2\left(\bmod 3\right)$.	**0,25**
$x^3 - x = \left(x-1\right)x\left(x+1\right) \equiv 0\left(\bmod 3\right)$; $3z \equiv 0\left(\bmod 3\right)$.	**0,25**
Như vậy vế trái chia cho 3 dư 0 hoặc 1 mà vế phải chia cho 3 dư 2. Vậy phương trình đã cho vô nghiệm nguyên.	**0,25**
2. (0,75 điểm). Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh bằng 1 . Bên trong hình vuông người ta lấy tùy ý 2021 điểm phân biệt $A_1, A_2, ..., A_{2021}$ sao cho 2025 điểm $A, B, C, D, A_1, ..., A_{2021}$ không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng từ 2025 điểm trên luôn tồn tại 3 điểm tạo thành hình tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{4044}$.	

Ta chứng minh từ 2025 điểm đã cho tạo ra được đúng 4044 tam giác không có điểm trong chung (tức là: mọi điểm Y đã nằm ở miền trong tam giác này thì không nằm ở miền trong tam giác kia)	
Bước 1: từ A, B, C, D và A_1 tạo ra được 4 tam giác không có điểm trong chung. Bước 2: Điểm A_2 sẽ nằm bên trong của một trong 4 tam giác đã có. Không mất tính tổng quát ta giả sử A_2 nằm trong ΔABA_1, khi đó sẽ tạo ra thêm được 2 tam giác. Như vậy có $4+2=6$ tam giác không có điểm trong chung. Bước 3: Điểm A_3 sẽ nằm ở một trong 6 tam giác đã có, không mất tính tổng quát, giả sử A_3 nằm trong ΔABA_2. Khi đó ta có $6+2=8$ tam giác không có điểm trong chung.	**0,25**
Sau 2021 bước như vậy thì hình vuông đã cho được chia thành 4044 tam giác không có điểm trong chung.	**0,25**
Mặt khác tổng diện tích 4044 tam giác đó bằng 1, suy ra tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không quá $\frac{1}{4044}$.	**0,25**
Câu V. (1,0 điểm). Cho ba số dương x, y và z thỏa mãn $x+y+z\le 1$. Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\left(\frac{1}{y^2}-1\right)\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\ge 512.$	
Ta có $\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)\left(1-z^2\right)\ge 512x^2y^2z^2$ $\Leftrightarrow \left(1-x\right)\left(1+x\right)\left(1-y\right)\left(1+y\right)\left(1-z\right)\left(1+z\right)\ge 512x^2y^2z^2$	**0,25**
Do $x+y+z\le 1$ nên ta có $\left(1-x\right)\left(1-y\right)\left(1-z\right)\left(1+x\right)\left(1+y\right)\left(1+z\right)$ $\ge \left(y+z\right)\left(z+x\right)\left(x+y\right)\left(2x+y+z\right)\left(x+2y+z\right)\left(x+y+2z\right) \quad (1)$	**0,25**
Chứng minh được: $\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)\ge 8xyz \quad (2).$ Và: $\left(2x+y+z\right)\left(x+2y+z\right)\left(x+y+2z\right)$ $\ge 2\sqrt{x+y}\sqrt{x+z}\ 2\sqrt{y+x}\sqrt{y+z}\ 2\sqrt{z+x}\sqrt{z+y}$ $=8\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$ $\ge 8.8xyz \quad (3).$	**0,25**
Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}.$	**0,25**